Opción A

Modelo4 Ejercicio 1 Modelo 4 Opción A sobrantes 1996

Si una función f : [a b] $\rightarrow$ R es integrable, se llama valor medio de f en el intervalo [a,b] al número m =

$= \frac{1}{b-a}\int_{+a}^{+b} f(x)\,dx$

Para hacer un estudio sobre, la capacidad de memorizar de un niño se utiliza el siguiente modelo: si x es su edad en años, entonces su capacidad de memorizar viene darla por f(x) = 1 + 2x Ln(x) $(0 \le x \le 5)$, donde Ln(x) es el logaritmo neperiano de x.

(a) [1 punto]. Describe el método de integración por partes.

(b) [1'5 puntos]. Encuentra, usando el modelo descrito, el valor medio de la capacidad de memorizar de un niño entre su primer y su tercer cumpleaños.

Solución

a)

Se llama valor medio de f en el intervalo [a,b] al número $m = \frac{1}{b-a}\int_{+a}^{+b} f(x)\,dx$

f(x) = 1 + 2x Ln(x) $(0 \le x \le 5)$,

"El método de integración por partes nos dice que si u(x) y v(x) son funciones con derivada continua entonces $\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$. En forma diferencial es $\int u.dv = u.v - \int v.du$. (Está basado en la derivada del producto de dos funciones).

b)

$m = \frac{1}{3-1}\int_{+1}^{+3}(1+2x\ln(x))dx$

$I = \int (1+2x\ln(x))dx = x + 2\int x.\ln(x)dx = x + 2.I_1$

$I_1 = \int x.\ln(x)dx$. Es una integral por parte, hacemos u = ln(x) y dv = xdx con lo cual du = (1/x)dx y $v = x^2/2$

$I_1 = \int x.\ln(x)dx = (x^2/2)\ln(x) - \int (x/2))dx = (x^2/2)\ln(x) - x^2/4$

$I = x + 2.I_1 = x + 2[(x^2/2)\ln(x) - x^2/4] = x + x^2\ln(x) - x^2/2$

$m = \frac{1}{3-1}\int_{+1}^{+3}(1+2x\ln(x))dx = (1/2)[\,x + x^2\ln(x) - x^2/2]^3_1 =$

$= (1/2)[(3 + 9\ln(3) - 9/2) - (1 + 0 - 1/2)] = 2 + (9/2)\ln(3)$

Modelo4 Ejercicio 2 Modelo 4 Opción A sobrantes 1996

[2'5 puntos Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función *f* dada por $f(x) = 2x.e^x + \frac{x^3-2}{x^2+4}$ en el punto de abscisa x = 0.

Solución

$f(x) = 2x.e^x + \frac{x^3-2}{x^2+4}$

La recta tangente en x = 0 es y – f(0) = f '(0).(x – 0)

La recta normal en x = 0 es y – f(0) = (- 1/f '(0)).(x – 0)

$f(x) = 2x.e^x + \frac{x^3-2}{x^2+4}$

$f'(x) = 2e^x + 2x.e^x + \frac{3x^2(x^2+4) - (x^3-2)(2x)}{(x^2+4)^2}$

f(0) = 0 - 2/4 = - 1/2

f '(0) = 2 + 0 + 0/16 = 2

La recta tangente en x = 0 es y + 1/2 = 2.(x – 0)

La recta normal en x = 0 es y + 1/2 = (- 1/2).(x – 0)

Modelo4 Ejercicio 3 Modelo 4 Opción A sobrantes 1996

(a) [1'5 puntos]. Determina una matriz X que verifique la relación $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) [1 punto] Calcula el determinante de la matriz X hallada

Solución

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$. En forma abreviada AX = B con A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Como det(A) = $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (1).\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ = -1 ≠ 0 la matriz A admite inversa $A^{-1} = (1/|A|)(Adj(A^t))$ y además en la expresión AX = B podemos multiplicar por la izquierda por la inversa de A obteniendo

$A^{-1}AX = A^{-1}B$

$IX = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$

Calculamos A^{-1} y después la multiplicamos por la matriz B

$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = (1/|A|)(Adj(A^t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\det(X) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 24 + 3 = 27$$

Modelo4 Ejercicio 4 Modelo 4 Opción A sobrantes 1996

Sea C la circunferencia de ecuación $C \equiv x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$,

(a) [1 punto] Calcula el centro y el radio de C.

(b) [1 punto]. Calcula el punto B que es el diametralmente opuesto del punto A = (-1,7).

(c) [0'5 puntos] ¿Cuál es la posición relativa de las rectas tangentes a C en los puntos A y B?

Solución

a)

Circ. $\equiv x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$,

La circunferencia de centro C (a,b) y radio r es $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$. Desarrollando esta expresión tenemos

Circ. $\equiv x^2 + y^2 – 2ax – 2by + c = 0$. Igualando obtenemos

-2a = -4, de donde a = 2

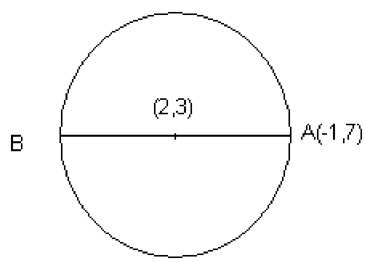
-2b = -6, de donde b = 2

$r = +\sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{4+9+12} = \sqrt{25} = 5$

El centro de la circunferencia es el punto C(a,b) = C(2,3)

El radio de la circunferencia es r = 5

b)



Si B es el punto diametralmente opuesto al A, el centro(2,3) es el punto medio del segmento AB, es decir:

(2,3) = ((x -1)/2, (y+7)/2), de donde

2 = (x -1)/2 y por tanto x = 5

3 = (y + 7)/2 y por tanto y = - 1

El punto buscado es B(5, -1)

c)

Las tangentes a una circunferencuia en los puntos extremos de cualquier diámetro son paralelas, puesto que el diámetro es perpendicular a cualquier tangente a la circunferencia en sus puntos extremos.

Opción B

Modelo4 Ejercicio 1 Modelo 4 Opción B sobrantes 1996

(a) [1 punto] Describe el procedimiento de integración por partes.

(b) [1'5 puntos]. Determina una función f : [0, ∞] → R sabiendo que su función derivada viene dada por f '(x) = Ln((x + 3)(x + 1)) y que f(0) = Ln(27), donde Ln(x) representa el logaritmo neperiano de x.

Solución

a)

"El método de integración por partes nos dice que si u(x) y v(x) son funciones con derivada continua entonces $\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$. En forma diferencial es $\int u.dv = u.v - \int v.du$. (Está basado en la derivada del producto de dos funciones).

b)

Tenemos f '(x) = Ln((x + 3)(x + 1)) y que f(0) = Ln(27).

Por el Teorema Fundamental del cálculo Integral que dice: Si f(x) es una función continua en el intervalo [a,b] entonces la función F(x) = $\int_a^x f(f)dt$ es derivable y su derivada es F '(x) = f(x).

En nuestro caso tenemos que f(x) = $\int$ f '(x)dx.

I = f(x) = $\int$ f '(x)dx = $\int$ Ln((x + 3)(x + 1)) dx = $\int$ Ln((x^2 + 4x + 3))dx. Integral por partes.

Tomamos u = Ln((x + 3)(x + 1)) y dv = dx, de donde du = [(2x + 4)/(x^2 + 4x + 3)]dx y v = x

I = x. Ln|(x + 3)(x + 1)| - $\int$ x. [(2x + 4)/(x^2 + 4x + 3)]dx =

= x. Ln|(x + 3)(x + 1)| - $\int$ [(2x^2 + 4x)/(x^2 + 4x + 3)]dx = x.Ln|(x + 3)(x + 1)| – I_1

I_1 = $\int$ [(2x^2 + 4x)/(x^2 + 4x + 3)]dx es una integral racional.

Efectuamos antes la división por que el numerador no es de menor grado que el denominador

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 + 4x & x^2 + 4x + 3 \\ \cline{2-2} -2x^2 - 8x - 6 & 2 \\ \hline -4x - 6 & \end{array}$$

I_1 = $\int$ [(2x^2 + 4x)/(x^2 + 4x + 3)]dx = $\int$ (2)dx + $\int$ [(- 4x - 6)/(x^2 + 4x + 3)] dx =

= 2x + $\int$ (A/(x+3))dx + $\int$ (B/(x+1))dx = 2x + A.Ln|x+3| + B.Ln|x+1| *

Calculamos las constantes A y B

[(- 4x - 6)/(x^2 + 4x + 3)] = (A/(x+3)) + (B/(x+1)) = [A(x+1)+B(x+3))/(x^2 + 4x + 3)]

Igualando numeradores

-4x – 6 = A(x+1)+B(x+3)

Para x = -1, -2 = B(2) de donde B = -1

Para x = -3, 6 = A(-2) de donde A = -3

Luego I_1 = 2x - 3.Ln|x+3| - 1.Ln|x+1|, por tanto

I = f(x) = x.Ln((x + 3)(x + 1)) – I_1 = x.Ln|(x + 3)(x + 1)| – 2x + 3Ln|x+3| + Ln|x+1| + K

Como dicen que f(0) = Ln(27) tenemos que

Ln(27) = 0 – 0 + 3Ln(3) + Ln(1) + K = Ln(3^3) + K = Ln(27) + K, de donde K = 0 y la función pedida es:

f(x) = x.Ln|(x + 3)(x + 1)| – 2x + 3Ln|x+3| + Ln|x+1|

Modelo4 Ejercicio 2 Modelo 4 Opción B sobrantes 1996

La función f definida por f '(x) = $\begin{cases} \dfrac{x^2-(a+3)x+3a}{x-3}, & \text{si } x \neq 3 \\ 1, & \text{si } x = 3 \end{cases}$; es derivable en toda la recta real

(a) [1'5 puntos]. ¿Cuánto vale a?

(2) [1 punto]. Para dicho valor de a, cuánto vale f '(3)?

Solución

a)

Como $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-(a+3)x+3a}{x-3}, & \text{si } x \neq 3 \\ 1, & \text{si } x = 3 \end{cases}$; es cierto para todo nº real lo es para el 3, por tanto:

$\lim_{x \to 3} f'(x) = f'(3)$

$f'(3) = 1$

$\lim_{x \to 3} f'(x) = \lim_{x \to 3} \dfrac{x^2-(a+3)x+3a}{x-1} = \dfrac{0}{0}$

Le aplicamos la Regla de L'Hôpital que dice : Si f y g son continuas en [a-r,a+r], derivables en (a-r,a+r) y además f(a) = g(a) =0 entonces si existe $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$\lim_{x \to 3} f'(x) = \lim_{x \to 3} \dfrac{2x-(a+3)}{1} = \dfrac{3-a}{1} = 3 - a$

Como $\lim_{x \to 3} f'(x) = f'(3)$ tenemos que 3 – a = 1, de donde a = 2 y la derivada de la función dada es :

$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}, & \text{si } x \neq 3 \\ 1, & \text{si } x = 3 \end{cases}$;

b)

Viendo la función derivada que lo es en todo $\Re$ vemos que f '(3) = 1. Si aplicásemos la definición obtendríamos lo mismo, pero no es necesario pues ya me dicen que existe f '(x) en todo $\Re$ y me han dado su expresión.

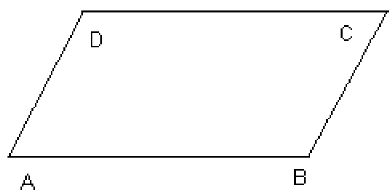
Modelo4 Ejercicio 3 Modelo 4 Opción B sobrantes 1996

(a) [2 puntos]. Encuentra el ángulo que forman las diagonales **AC** y **BD** del paralelogramo ABCD en el que A = (2, 1,0), B = (0,0,0) y C = (0, -1,2).

(b) [0'5 puntos]. ¿Es un cuadrado? Justifica la respuesta

Solución

a)



Como es un paralelogramo los vectores libres **AB** y **DC** son iguales, por tanto:

A = (2, 1,0), B = (0,0,0) y C = (0, -1,2).

AB = **DC**

(-2, -1, 0) = (0-x, -1-y, 2-z).Igualando

-2 = -x , de donde x = 2

-1 = -1 - y , de donde y = 0

0 = 2 - z , de donde z = 2

El punto que falta del paralelogramo es D(2,0,2)

Veamos el ángulo de las diagonales pedidas

AC = (0-2, -1-1, 2-0) = (-2, -2, 2)

BD = (2-0, 0-0, 2-0) = (2, 0, 2)

$$\left|\cos(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}})\right| = \left|\frac{\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\left\|\overrightarrow{BD}\right\|}\right| = \left|\frac{-4+0+4}{\sqrt{4+4+4}\cdot\sqrt{4+0+4}}\right| = 0$$

El ángulo que forman **AC** y **BD** es arcos(0) = 90º

b)

El paralelogramo es un cuadrado si las longitudes de sus lados es la misma y dos lados consecutivos son perpendiculares, es decir el vector **AB** tiene que ser perpendicular (producto escalar 0) al vector **BC**

AB = (-2, -1, 0)

BC = (0, -1, 2)

AB • BC = 0 + 1 + 0 = 1 ≠ 0, por tanto el paralelogramo no es un cuadrado.

Modelo4 Ejercicio 4 Modelo 4 Opción B sobrantes 1996

[2'5 puntos] Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{pmatrix}$, halla a, b, c y, d sabiendo que

(i) el vector cuyas coordenadas son las que aparecen en la primera columna de A es ortogonal al vector (1, -1, -1),
(ii) el producto vectorial del vector cuyas coordenadas son las que aparecen en la tercera columna de A por el vector (1, 0, 1) es (-2, 3, 2), y
(iii) el rango de la matriz A es 2.

Solución

(i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{pmatrix}$$

Si el vector (1,2,c) es ortogonal al vector (1, -1, -1) su producto escalar es 0
(1,2,c) • (1,-1,-1) = 0 = 1 – 2 – c = 0, de donde c = - 1
(ii)
(-7,b,d) ^ (1,0,1) = (-2,3,2). El producto vectorial lo escribo “^”.

(-7,b,d) ^ (1,0,1) = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & b & d \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(b) – **j**(-7 – d) + **k**(-b) = (b, 7 + d, -b) = (-2,3,2). Igualando miembro a miembro tenemos b = **-** 2 , y 7 + d = 3 de donde d = **-** 4.
(iii)
Si el rango(A) = 2 el determinante de A tiene que ser 0

det(A) = $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & -2 \\ -1 & -a & -4 \end{vmatrix}$ = 1(-4a – 2a) – 3(-8 – 2) +(-7)(-2a + a) =
= -6a +30 +7a = 30 + a = 0, de donde a = -30